Sveučilište u Splitu

Prirodoslovno – matematički fakultet

Učinak Jupitera na putanju Zemlje

Završni rad

Ivo Jukić

Split, rujan 2017.

Zahvaljujem se prof.dr.sc. Anti Bilušiću na mentorstvu i pomoći pri izradi završnog rada.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Odjel za fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

Učinak Jupitera na putanju Zemlje

Ivo Jukić

Sveučilišni preddiplomski studij Fizika

Sažetak:
Zemljina putanja bila bi u potpunosti stabilna kada bi Sunčev sustav činile samo Zemlja i Sunce. Postojanje ostalih planeta u sustavu uzrokuje preturbacije i nestabilnost Zemljine putanje. Cilj ovog rada je ispitati u kojoj mjeri Jupiter, kao najmasivniji planet Sunčeva sustava, utječe na nestabilnost Zemljine orbite. Sustav triju tijela koji čine Sunce, Jupiter i Zemlja su analizirani kroz simulaciju napravljenu u programskom jeziku C čiji konačni rezultat za zadane početne uvjete daje putanje sva tri tijela. Pokazalo se da povećanje Jupiterove mase dovodi do sve većih nestabilnosti Zemljine orbite. Kada bi Jupiter imao približno jednaku masu kao Sunce, Zemlja bi bila izbačena iz sustava nepovratno u svemir.

Ključne riječi: problem dva tijela, restringirani problem tri tijela, Newtonov zakon gravitacije, Euler – Cromer metoda, stabilna i nestabilna orbita

Rad sadrži: 20 stranica, 10 slika, 0 tablica, 10 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku

Mentor: prof. dr. sc. Ante Bilušić

Ocjenjivači: prof. dr. sc. Ante Bilušić
dr. sc. Željka Sanader
Viktor Cikojević, mag. phys.

Rad prihvaćen: 20. rujna 2017.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Basic documentation card

University of Split
Faculty of Science
Department of Physics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

Effect of Jupiter on Earth's orbit

Ivo Jukić

University undergraduate study programme Physics

Abstract:
If the Solar System consisted only of the Sun and Earth, Earth's orbit would be completely stable. Existence of other planets in the System causes turbulences and instability of the Earth's orbit. The main objective is to analyse the effect of Jupiter, as the most massive planet in the System, on the Earth's orbit. The three body system consisted of the Sun, Jupiter and Earth is analysed trough the simulation made in programing language C. The result for given initial conditions are orbits of three bodies. It is shown that Jupiter's mass growth causes increased instability of Earth's orbit. If the Jupiter had about the same mass as the Sun, the Earth would be thrown out of the System.

Keywords: two body problem, restricted three body problem, Newton's law of gravity, Euler – Cromer method, stable and unstable orbit

Thesis consists of: 20 pages, 10 figures, 0 tables, 10 references. Original language: Croatian

Supervisor: Prof. Dr. Ante Bilušić

Reviewers: Prof. Dr. Ante Bilušić
Dr Željka Sanader
Viktor Cikojević, mag. phys.

Thesis accepted: September 20th, 2017

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Sadržaj

1 Uvod

Problem tri tijela je problem određivanja putanje svakog tijela u sustavu tri tijela koja se međusobno privlače silom.[1] Općenito, taj problem nije analitički rješiv i putanje tijela su komplicirane. Problem je moguće uvijek riješiti numerički. [1] U ovom radu promatrat će se sustav triju tijela kojeg čine Sunce i dva planeta – Zemlja i Jupiter. Cilj je ispitati gravitacijski utjecaj Jupitera na gibanje Zemlje. Poznato je da postojanje drugih planeta Sunčeva sustava uzrokuje preturbacije Zemljine orbite, koja bi bila potpuno stabilna da je Zemlja jedini planet Sunčeva sustava. [2] U svrhu analize utjecaja odabran je baš Jupiter jer je to najasivniji planet Sunčeva sustava.[3] Taj problem je takozvani „restringirani problem triju tijela“ jer u ovom slučaju masa trećeg tijela, Zemlje, puno manja od masa ostalih dvaju tijela.[1] Precizno, masa Zemlje (6×10^{24} kg) je tri reda veličine manja od mase Jupitera (1.9×10^{27} kg) i čak šest redova veličine manja od mase Sunca (2×10^{30} kg).[3] U tom slučaju, Zemlja praktički neće utjecati na gibanje Sunca i Jupitera. Zato u proračunima za putanju Sunca i Jupitera dovoljno je uzeti u obzir samo njihovo gravitacijsko međudjelovanje i zanemariti utjecaj mase Zemlje. Naravno, u proračunima za putanju Zemlje mora se uzeti u obzir utjecaj i Sunca i Jupitera. Prije detaljnijeg razmatranja problema, prisjetimo se osnovnih svojstava jednostavnijeg sustava – sustava dvaju tijela.[4] U tom slučaju promatraju se samo dvije mase koje se gravitacijski privlače (tj. nema trećeg tijela). Za takav problem vrijedi nekoliko važnih svojstava. Prvo svojstvo je da se centar mase sustava ili ne giba ili se giba konstantnom brzinom. Drugo važno svojstvo slijedi iz zakona očuvanja angularnog momenta, koji vrijedi jer se radi o zatvorenom izoliranom sustavu, a to je da se gibanje obiju masa (gledano iz sustava centra mase) odvija u ravnini.[4] Za dobro odabrane početne uvjete (tj. one za koje mase nisu predaleko da bi gravitacijski međudjelovale i za koje početne brzine nisu takve da se mase oslobode gravitacijskog utjecaja jedna od druge) putanje masa su, gledano iz sustava centra mase, elipse čiji je zajednički fokus centar mase sustava i čiji oblik zavisi od početnih uvjeta i samih iznosa masa.[4] Problem dva tijela je važan za sustav Sunce-Jupiter-Zemlja jer, uz pretpostavku da masa Zemlje ne utječe na gibanje Sunca i Jupitera, putanje Sunca i Jupitera dobiju se upravo rješenjem problema dva tijela za Sunce i Jupiter. Dodavanjem trećeg tijela ponovno promatramo ravninsko gibanje jer je poznato da se gibanje Sunčevog sustava odvija gotovo u ravnini.[5] To je zato jer zakon očuvanja angularnog momenta vrijedi i za sustav proizvoljnog broja masa koje se gravitacijski privlače kao što vrijedi i za sustav dvije mase. Iako se pojedinačna masa može gibati u sve tri dimenzije, ukupno gibanje van ravnine okomite na ukupni angularni moment iščezava. Nakon dugo vremena i velikog broja sudara, gibanje masa pretežno prelazi u ravninsko gibanje. Upravo zato se planeti Sunčeva sustava gibaju otprilike u ravnini.[5] Zato će se u proračunima promatrati gibanje u samo dvije prostorne dimenzije. Ipak, zanimljivo je vidjeti kolika su zapravo odstupanja od potpuno ravninskog gibanja. Ustvari, zanima nas kut otklona ravnina pojedinih orbita planeta od ekliptike – ravnine u kojoj Zemlja orbitira oko Sunca.[6] Tada se uzima da je nagib ravnine Zemljine orbite jednak nuli. Općenito, za referentnu ravninu ne mora se uzeti ekliptika; može se proizvoljno uzeti bilo koja druga referentna ravnina, primjerice ravnina Jupiterove orbite oko Sunca. No, ekliptika je za promatrača na Zemlji najzanimljivija. Ravnina orbite Merkura je nagnuta 7.01^{o}, Venere 3.39^{o}, Marsa 1.85^{o}, Jupitera 1.31^{o}, Saturna 2.49^{o}, Urana 0.77^{o} te Neptuna 1.77^{o}.[6]

Ovaj sustav je posebno zanimljivo promatrati ako se masa Jupitera uzme kao promjenjiva varijabla i analizira što se događa s putanjom Zemlje pri promjenama. Što bi bilo sa Zemljom da je masa Jupitera deset, sto ili tisuću puta veća?

2 Teorijska osnova

Sustav čine tri mase koje međudjeluju gravitacijskom silom. Indeksi *s,j,z* označavaju Sunce, Jupiter i Zemlju redom. Ukupna sila na Jupiter je gravitacijska sila Sunca na Jupiter jer je utjecaj Zemlje na gibanje Jupitera zanemaren.[1] Analogno je ukupna sila na Sunce jednaka gravitacijskoj sili Jupitera na Sunce. Sa $\vec{F_j}$ i $\vec{F_s}$ označavat će se ukupne sile na Jupiter odnosno Sunce. Vrijedi jednadžba [7]:

$$\vec{F_j} = -Gm_s m_j \frac{\vec{r_j}-\vec{r_s}}{|\vec{r_j}-\vec{r_s}|^3} = -\vec{F_s} \tag{1}$$

pri čemu su m_s i m_j mase Sunca i Jupitera redom, a $\vec{r_j}$ i $\vec{r_s}$ radijvektori položaja Sunca i Jupitera redom.

Slijedi da su komponente sila u x i y smjeru dane s:

$$F_{j,x} = -Gm_s m_j \frac{x_j-x_s}{|\vec{r_j}-\vec{r_s}|^3} = -F_{s,x} \tag{2}$$

$$F_{j,y} = -Gm_s m_j \frac{y_j-y_s}{|\vec{r_j}-\vec{r_s}|^3} = -F_{s,y} \tag{3}$$

Ukupna sila na Zemlju je zbroj gravitacijske sile Sunca i Jupitera.

$$\vec{F_z} = -Gm_z m_s \frac{\vec{r_z}-\vec{r_s}}{|\vec{r_z}-\vec{r_s}|^3} - Gm_z m_j \frac{\vec{r_z}-\vec{r_j}}{|\vec{r_z}-\vec{r_j}|^3} \tag{4}$$

Komponente sile na Zemlju su:

$$F_{z,x} = -Gm_z m_j \frac{x_z-x_j}{|\vec{r_z}-\vec{r_j}|^3} - Gm_z m_s \frac{x_z-x_s}{|\vec{r_z}-\vec{r_s}|^3} \tag{5}$$

$$F_{z,y} = -Gm_z m_j \frac{y_z-y_j}{|\vec{r_z}-\vec{r_j}|^3} - Gm_z m_s \frac{y_z-y_s}{|\vec{r_z}-\vec{r_s}|^3} \tag{6}$$

Akceleracije tijela lako se dobiju iz drugog Newtonovog zakona dijeljenjem ukupne sile na tijelo s masom tijela. One uz zadane početne uvjete (tj. početne položaje i početne brzine tijela) omogućavaju određivanje putanja tijela i brzina tijela u svakom trenutku vremena.

3 Simulacija

3.1 Euler – Cromerova metoda

Simulacija za sustav će se raditi u programskom jeziku C-u pomoću Euler – Cromerove metode.[3] Ta metoda je modifikacija originalne Eulerove metode. Može se primijeniti na sustav diferencijalnih jednadžbi oblika:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, v) \tag{7}$$

$$\frac{dv}{dt} = g(t, x) \tag{8}$$

Početni uvjeti su oblika:

$$x(t_0) = x_0 \tag{9}$$

$$v(t_0) = v_0$$

Vremenski interval u kojem promatramo gibanje dijeli se u n jednakih vremenskih intervala tako da vrijedi:

$$t_n = t_0 + n\Delta t \tag{10}$$

Vrijednosti funkcija v i x u trenucima t_{n+1} mogu se dobiti iz sljedećih jednadžbi:

$$v_{n+1} = v_n + g(t_n, x_n)\Delta t \tag{11}$$

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, v_{n+1})\Delta t \tag{12}$$

Razlika između ove metode i originalne Eulerove je ta što se u jednadžbi (12) pri računanju Eulerovom metodom koristi v_n umjesto v_{n+1}. Koristi se ova metoda jer ona dobro čuva energiju, što je dobro za ovakve oscilatorne sustave u kojima vrijedi zakon sačuvanja energije. Originalna Eulerova metoda bi s vremenom povećavala energiju tj. amplitude oscilacija bi bile sve veće i zato je ona manje precizna. Način na koji Euler-Cromerova metoda čuva energiju najbolje se vidi na primjeru matematičkog njihala.[8] Sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje matematičko njihalo pri malim oscilacijama je sljedeći:[8]

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{13}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \tag{14}$$

pri čemu je θ kut otklona njihala, ω je kutna frekvencija, a l duljina njihala. Primjenjujući pravilo iz jednadžbi (11) i (12) za matematičko njihalo dobijaju se jednadžbe:

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t \tag{15}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + (\omega_i - \frac{g}{l}\theta_i \Delta t\ )\Delta t \tag{16}$$

Energija po umnošku mase i kvadrata duljine matematičkog njihala malih oscilacija je dana s:[8]

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{2l}\theta^2 \tag{17}$$

pri čemu je izraz (17) vrijedi samo za male kuteve osciliranja. Dakle, energija njihala u trenutku t_{n+1} je dana s:

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}\omega_{i+1}^2 + \frac{g}{2l}\theta_{i+1}^2 \tag{18}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (15) i (16) u jednadžbu (18) i sređivanjem dobije se:[8]

$$E_{i+1} = E_i + \frac{g}{2l}(\omega_i^2 - \frac{g}{l}\theta_i^2)\Delta t^2 \tag{19}$$

Izraz u zagradi u jednadžbi (19) jednak je dvostrukoj razlici kinetičke i potencijalne energije u trenutku t_i. Cijeli drugi član s desne strane jednakosti predstavlja grešku jer bi ukupna energija u svim trenucima trebala biti jednaka. No, sumiranjem po svim vremenskim trenucima unutar jednog perioda ukupna greška iščezava jer je prosječna kinetička energija jednaka prosječnoj potencijalnoj energiji.[8] Stoga je ukupna energija očuvana. Korištenjem Eulerove metode, koeficijent pogreške jednak je sumi kinetičke i potencijalne energije pa ne dolazi do konačnog iščezavanja na kraju perioda, kao što je to u slučaju Euler-Cromerove metode.[8]

3.2 Program u programskom jeziku C

Matematičkim opisom sustava i definiranjem metode koja se koristi, dostupno je sve potrebno za izradu koda. Za početak je potrebno definirati koje će se jedinice koristiti za duljinu i vrijeme. Prikladno je za duljinu uzeti astronomsku jedinicu za duljinu (AU) koja je jednaka prosječnoj udaljenosti Zemlje od Sunca i za koju vrijedi [3]:

$$1\ \mathrm{AU} \approx\ 1.5 \times 10^{11}\mathrm{m} \tag{20}$$

Vrijeme je prikladno mjeriti u godinama.[6] Prvo se uključe potrebne biblioteke:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
```

U izrazima (1) – (6) javljaju se umnošci gravitacijske konstante i masa Sunca i Jupitera, pa će se oni javljati i u izrazima za akceleraciju. Stoga je potrebno njih definirati na početku kao konstante. Javlja se i umnožak gravitacijske konstante sa masom Zemlje, no kako se u proračunima koristi akceleracija, a gravitacijski učinak Zemlje na gibanje Jupitera i Sunca je zanemaren, ta konstanta neće biti potrebna. Definiramo konstante na način:

```
#define GMs 40.5
#define GMj (1.9/2000)*40.5
```

Konstanta GMs predstavlja produkt gravitacijske konstante i mase Sunca, dok GMj predstavlja produkt gravitacijske konstante sa masom Jupitera. Iznos konstanti je izračunat uz pretpostavku da se duljina i vrijeme mjere u već spomenutim jedinicama. Nadalje, treba definirati neke funkcije koje će olakšati pisanje glavnog programa. Prvo se piše funkcija koja zadane x ili y koordinate položaja Sunca i Jupitera vraća x ili y komponentu akceleracije, ovisno jesu li zadane x ili y koordinate. Sa $x1$ je zadana koordinata tijela čija se akceleracija računa, a s $x2$ koordinata tijela koje uzrokuje akceleraciju. Funkciji valja zadati i međusobnu udaljenost tijela određenu argumentom $r12$ te produkt gravitacijske konstante i mase tijela koje uzrokuje akceleraciju tj. tijela sa koordinatom $x2$. Primjerice, za izračunati y - komponentu akceleracije Jupitera zbog prisutnosti Sunca, na mjesto argumenta $x1$ uvrsti se y -koordinata Jupitera, na mjesto argumenta $x2$ uvrsti se y -koordinata Sunca, na mjesto $r12$ uvrsti se njihova međusobna udaljenost, a na mjesto GM uvrsti se konstanta GMs.

```
  double akceleracija_zvijezde(double x1, double x2, double r12,double GM)
{
    double
```

```
    rezultat=(GM*(x2-x1))/(r12*r12*r12);
    return rezultat;
}
```

Sada se piše funkcija koja vraća komponentu akceleracije Zemlje zbog prisutnosti Sunca i Jupitera. Primjerice, za izračunati y- komponentu akceleracije, na mjesto $x1$ uvrstimo y -koordinatu Sunca, na mjesto $x2$ y -koordinatu Jupitera, na mjesto $x3$ y -koordinatu Zemlje, na mjesta $r13$ i $r23$ međusobnu udaljenost Zemlje od Sunca odnosno Jupitera te na mjesta GM1 i GM2 konstante GMs i GMj redom.

```
double akceleracija_planet(double x1, double x2, double x3,double r13, double r23, double GM1, double GM2)
{
    double rezultat;
    rezultat=(GM1*(x1-x3))/(r13*r13*r13)+(GM2*(x2-x3))/(r23*r23*r23);
    return rezultat;
}
```

Gibanje se promatra iz sustava centra mase jer gibanje samog centra mase nije interesantno ispitivati.[4] Zato, potrebno je nakon svake iteracije novoizračunatu koordinatu x ili y mjeriti iz tog sustava. Zato je korisno napraviti funkciju koja će vraćati x ili y koordinatu centra mase, ovisno jesu li zadane x ili y koordinate tijela. Podsjećamo, centar mase sustava je zapravo centar mase Sunca i Jupitera jer je masa Zemlje puno manja od masa ovih dvaju tijela.[1] Na mjesta argumenata $x1$ i $x2$ se stavljaju x ili y koordinate Sunca i Jupitera, dok se na mjesta argumenata GM1 i GM2 stavljaju već spomenuti produkti gravitacijske konstante i odgovarajućih masa.

```
double centar_mase(double x1,double x2,double GM1, double GM2)
{
    double xcm;
    xcm=(GM1*x1+GM2*x2)/(GM1+GM2);
    return xcm;
}
```

Sad su napisane sve potrebne funkcije, pa se može prijeći na glavni program. Na početku se piše inicijalizacija potrebnih varijabli, definira se pokazivač na datoteku u koju se spremaju koordinate tijela kako bi se kasnije grafički prikazale putanje te se zadaju početni uvjeti.

```
FILE *dat;
//Inicijalizacija vremenske varijable i koraka iteracije
double t=0.0, dt=0.001;
//Inicijalizacija koordinata, komponenti brzina i komponenti akceleracija ("j"
```

```
označava Jupiter, "s" Sunce, "z" Zemlju)
double xj,yj,xs,ys,xz,yz,vxj,vyj,vxs,vys,vxz,vyz,axj,ayj,axs,ays,axz,ayz;
//medjusobne udaljenosti Sunca i Jupitera, Zemlje i Jupitera te Zemlje i Sunca
double rsj,rzj,rzs;
//koordinate centra mase
double xcm,ycm;
//Neka su u pocetnom trenutku Sunce i Jupiter na x-osi i neka je ishodiste sustava
u centru mase dvaju tijela
rsj=5.43; /*Pocetna udaljenost Sunca i Jupitera*/
xj=(GMj/(GMs+GMj))*rsj;
yj=0.0;
xs=-(GMs/(GMs+GMj))*rsj;
ys=0.0;
//Pocetni polozaj za Zemlju
xz=xs+1.0;
yz=0.0;
//Pocetne brzine
vxj=0.0;
vyj=2.7;
vxs=0.0;
vys=0.0;
vxz=0.0;
vyz=6.28;
```

Otvara se datoteka za upis i petlja za iteracije. Oznaka „r“ označava međudobnu udaljenost dvaju tijela; sljedeća 2 slova označavaju o kojim se tijelima radi. Primjerice, rsj je međusobna udaljenost Sunca i Jupitera. Sa „a“ se označava akceleracija, sa „v“ brzina, a s „x“ ili „y“ koordinata položaja. Prvo slovo iza „a“ govori o kojoj se komponenti akceleracije radi, a drugo slovo o kojem je tijelu riječ. Analogne oznake su i za brzinu. Slovo iza oznaka „x“ ili „y“ govori o kojem je tijelu riječ. Položaji i brzine se u svakom sljedećem trenutku računaju u skladu s jednadžbama (11) i (12).

```
dat=fopen("masaJupitera x1000.txt","w");
while(t<=9.5)
{

       //Prebacimo koordinate u sustav centra mase
       xcm=centar_mse(xs,xj,GMs,GMj);
       ycm=centar_mse(ys,yj,GMs,GMj);
       xs=xs-xcm;
       ys=ys-ycm;
       xj=xj-xcm;
       yj=yj-ycm;
       xz=xz-xcm;
       yz=yz-ycm;
```

```
        //medjudobne udaljenosti tijela
        rsj=sqrt((xs-xj)*(xs-xj)+(ys-yj)*(ys-yj));
        rzj=sqrt((xz-xj)*(xz-xj)+(yz-yj)*(yz-yj));
        rzs=sqrt((xz-xs)*(xz-xs)+(yz-ys)*(yz-ys));
        //komponente akceleracija
        axs=akceleracija_zvijezde(xs,xj,rsj,GMj);
        ays=akceleracija_zvijezde(ys,yj,rsj,GMj);
        axj=akceleracija_zvijezde(xj,xs,rsj,GMs);
        ayj=akceleracija_zvijezde(yj,ys,rsj,GMs);
        axz=akceleracija_planet(xj,xs,xz,rzj,rzs,GMj,GMs);
        ayz=akceleracija_planet(yj,ys,yz,rzj,rzs,GMj,GMs);
        //brzine
        vxs=vxs+axs*dt;
        vys=vys+ays*dt;
        vxj=vxj+axj*dt;
        vyj=vyj+ayj*dt;
        vxz=vxz+axz*dt;
        vyz=vyz+ayz*dt;
        //ispis polozaja
        fprintf(dat,"\n%lf \t %lf \t %lf \t %lf \t %lf \t %lf",xs,ys,xj,yj,xz,yz);
        xs=xs+vxs*dt;
        ys=ys+vys*dt;
        xj=xj+vxj*dt;
        yj=yj+vyj*dt;
        xz=xz+vxz*dt;
        yz=yz+vyz*dt;
        t=t+dt;
}
fclose(dat);
return 0;
```

3.3 Analiza rezultata

Zanimljivo je promotriti ponašanje sustava mijenjajući mase Jupitera za različite početne uvjete, pri čemu su mase Sunca i Zemlje konstantne i jednake njihovoj stvarnoj masi. Osim slučaja kad je masa Jupitera jednaka stvarnoj masi, razmotrit će se i slučajevi kad je ona deset, sto i tisuću puta veća te analizirati putanje u tim slučajevima. Za mijenjati mase Jupitera dovoljno je na početku koda, gdje je definirana konstanta GMj, istu zamijeniti sa deset, sto ili tisuću puta većom. Neka je u svim slučajevima početna udaljenost Sunca od Jupitera 5.43 AU, a Sunca od Zemlje 1 AU. Neka su sva tri tijela u početnom trenutku na x-osi i neka je ishodište koordinatnog sustava u centru mase sustava 3 tijela (što je ustvari centar mase Sunca i Jupitera jer se masa Zemlje aproksimativno može zanemariti). Potrebno je i odrediti red veličine početnih brzina Jupitera i Sunca koje valja promotriti. Pretpostavimo li da se oba planeta gibaju po kružnim putanjama, obodna brzina će biti za Zemlju jednaka [3]

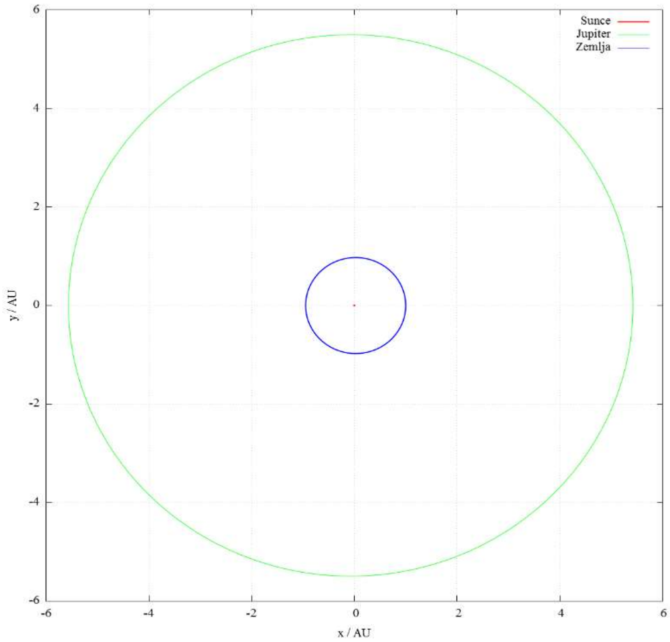
$$\frac{2\times(1\ \mathrm{AU})\times\pi}{1\ \mathrm{godina}} \approx 6.28\,\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}} \tag{21}$$

dok će za Jupiter, uzmemo li da je prosječna udaljenost Jupitera od Sunca jednaka 5.20 AU, a period ophodnje planeta oko Sunca 11.87 godina,[3] biti

$$\frac{2\times(5.20\ \mathrm{AU})\times\pi}{1\ \mathrm{godina}} \approx 2.75\,\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}} \tag{22}$$

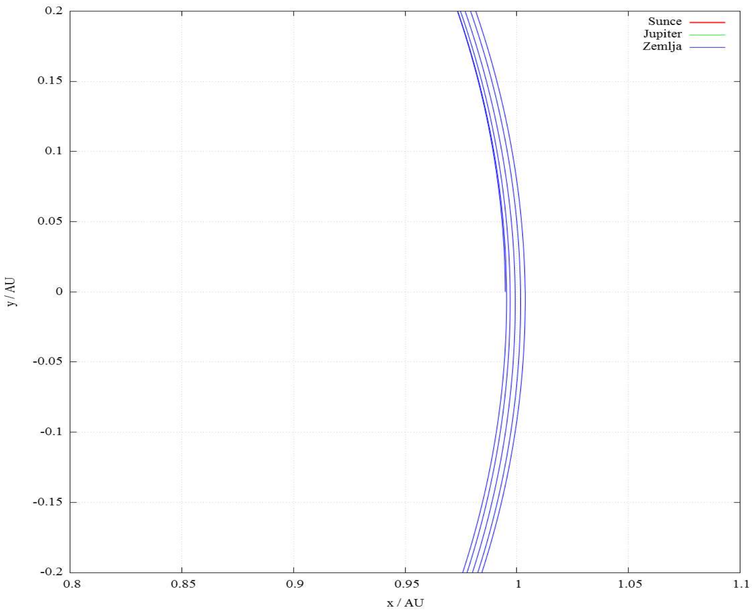
3.3.1 Stvarna masa Jupitera

Prvo će se promotriti slučaj stvarne mase Jupitera. Neka Sunce i Jupiter imaju samo y-komponentu početne brzine i neka su one jednake brzinama iz izraza (14) i (15) i neka Sunce u početnom trenutku miruje. Na slici 1 prikazane su putanje sva tri tijela u tom slučaju. Iz slike se vidi da Sunce i dalje praktički ostaje nepomično, dok Zemlja i Jupiter slijede eliptične (otprilike kružne [3]) putanje oko Sunca.



Slika 1 *Putanje triju tijela pri početnim uvjetima: Sunce miruje, x-komponente brzina Zemlje i Jupitera jednake nuli, y-komponenta brzine Jupitera je 2.75 AU/godina, a Zemlje 6.28 AU/godina.*

Zanimljivo je uvećati dio Zemljine putanje u svrhu provjere stabilnosti putanje (jer je moguće da putanja samo izgleda stabilno gledano s velike skale duljina kao što i izgleda da Sunce miruje, a ono se ustvari giba premalom putanjom da bi se zamjetila na grafu).[9] Uvećani dio putanje sa slike 1 prikazan je na slici 2. Vrijeme promatranja je pet godina. Nestabilnost je jasno vidljiva na skali stotinki astronomskih jedinica duljine. Stoga se zaključuje da je orbita Zemlje u ovom slučaju dosta stabilna.



Slika 2 *Uvećan dio Zemljine putanje sa slike 1 na vremenskoj skali od pet godina. Nestabilnost putanje je jasno vidljiva na skali stotinki astronomskih jedinica duljine.*

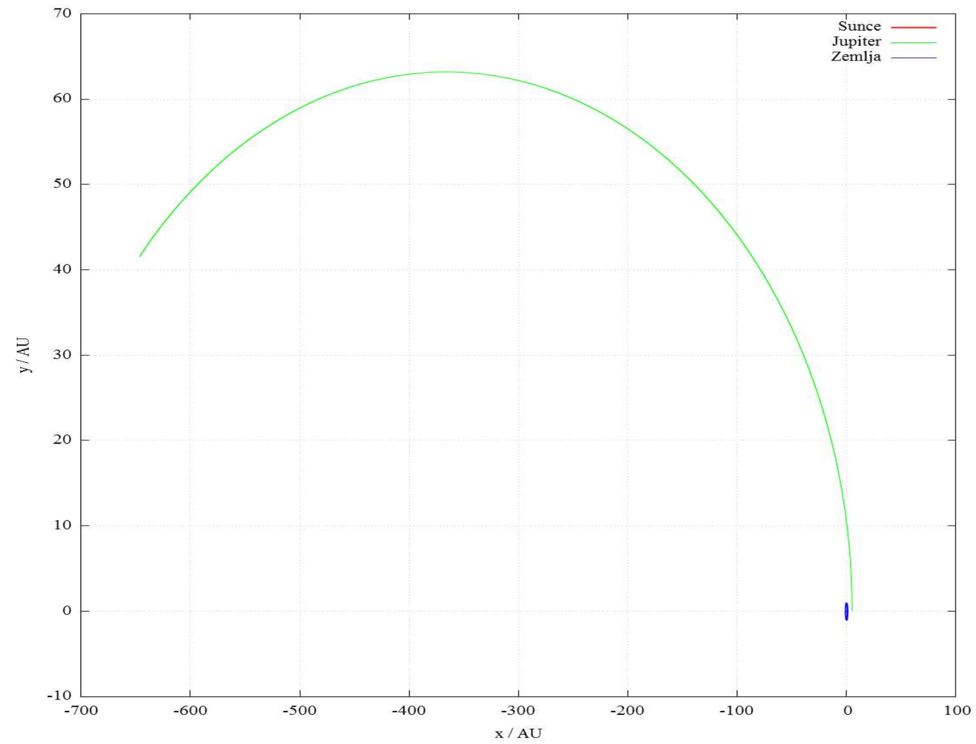
Zatim, zanimljivo je pogledati kolika bi trebala biti početna brzina da se primjerice Jupiter oslobodi gravitacijskog utjecaja Sunca.[10] Matematički, tu brzinu može se dobiti iz sljedeće jednadžbe

$$G\frac{m_s m_j}{r} = \frac{m_j v^2}{2} \tag{23}$$

tj. postavljajući uvjet da je kinetička energija Jupitera u početnom trenutku dovoljno velika da nadvlada gravitacijski utjecaj Sunca. U jednadžbi (14) r je početna udaljenost Jupitera od Sunca. Sređivanjem jednadžbe (14) dobije se da je ta brzina jednaka

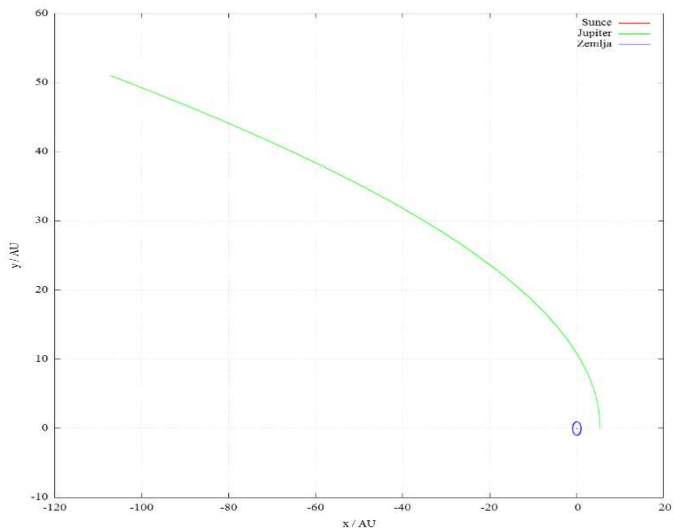
$$v = \sqrt{\frac{2Gm_s}{r}} \approx 3.86\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}} \tag{24}$$

Zaista, unošenjem primjerice y-komponente brzine Jupitera od $3.85\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}}$ i zadržavanjem svih ostalih parametara istim kao u prethodnom slučaju, Jupiter i dalje ostaje u eliptičnoj orbiti oko Sunca, a period ophodnje se mjeri u tisućama godina. Putanje u ovom slučaju su prikazane na slici 3.



Slika 3 *Prikaz putanja Jupitera i Zemlje pri početnoj brzini Jupitera neznatno manjoj od one potrebne za oslobođenje od gravitacijskog utjecaja Sunca iz jednadžbe (17). Za opisati putanju na slici (obojenu zelenom bojom) Jupiteru je bilo potrebno dvije tisuće godina. Predviđa se da je puni period ophodnje približno desetak tisuća godina.*

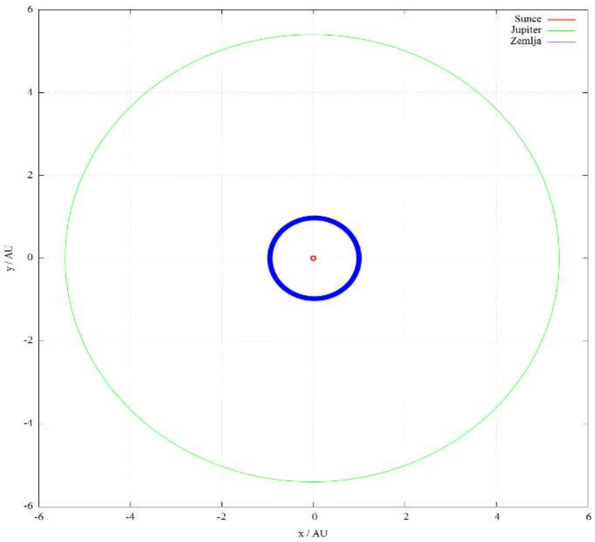
Sada se unosi brzina neznatno veća od one iz jednadžbe (17). Uzima se da je iznos početne brzine $3.87\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}}$ i predviđa oslobođenje Jupitera od gravitacijskog utjecaja Sunca. Rezultati su prikazani na slici 4. Zaista, Jupiter se oslobađa Sunčevog privlačenja i odlazi u svemir.



Slika 4 *Prikaz putanja triju tijela pri početnoj brzini Jupitera neznatno većoj od brzine iz jednadžbe (15). Jupiter se oslobađa Sunčevog privlačenja.*

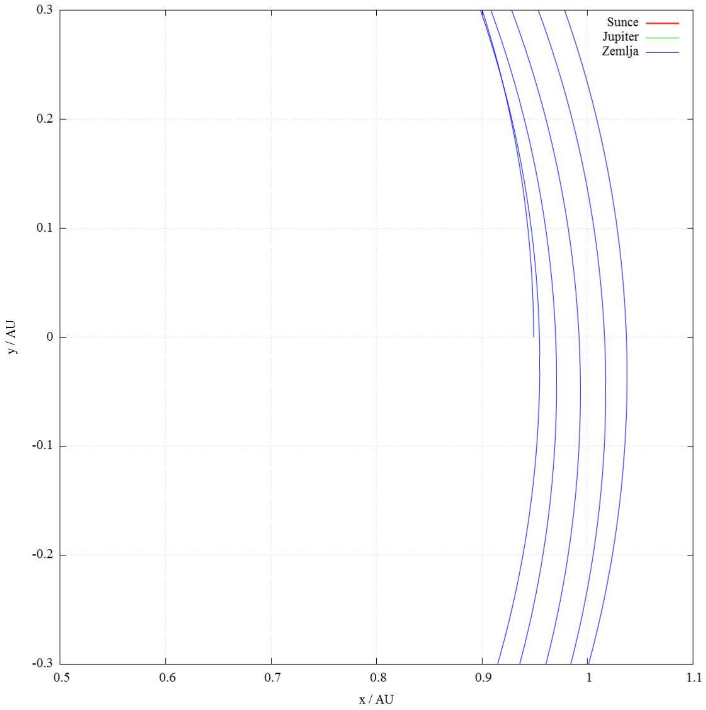
3.3.2 Deset puta veća masa Jupitera

Zatim, neka je masa Jupitera deset puta veća od stvarne mase. Svi ostali uvjeti neka ostanu kao u slučaju sa slike 1. Taj slučaj je prikazan na slici 5. Uočljivo je da Sunce više ne miruje kao što je to slučaj pri deset puta manjoj masi Jupitera. Sada se i Sunce i Jupiter rotiraju oko zajedničkog centra mase po eliptičnim putanjama. Precizno, Sunce je slijedilo eliptičnu putanju i u slučaju deset puta manje mase Jupitera, no ta elipsa je bila toliko mala da se na grafu mogla uočiti kao točka. Općenito, i u realnom Sunčevom sustavu Sunce slijedi eliptičnu putanju, no pošto je Sunčeva elipsa puno manja od elipsa ostalih planeta, u prvoj aproksimaciji se Sunčevo gibanje zanemaruje i kaže se da Sunce miruje i da se planeti gibaju po eliptičnim putanjama oko Sunca.[2] Uočljivo je i da Zemljina putanja nije više stabilna kao na slici 1. Vrijeme promatranja je sto godina.



Slika 5 *Prikaz putanja pri masi Jupitera deset puta većoj od stvarne mase. Zanimljivo je da se sada i Sunce vidljivo giba te da Zemljina putanja nije više stabilna kao na slici 1.*

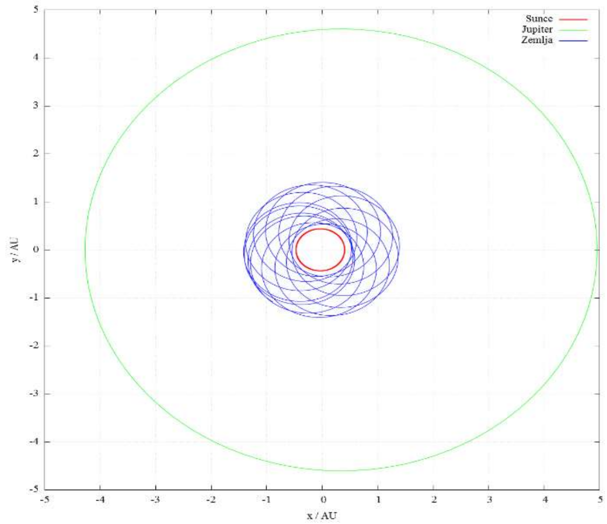
Radi lakšeg uočavanja, na slici 6 je prikazan uvećan dio putanje Zemlje sa slike 5 na kojem se očito vidi da se Zemlja više ne giba po stabilnoj putanji te se na skali desetinki astronomskih jedinica duljine jasno daju razlučiti različite putanje. Vrijeme promatranja je pet godina.



Slika 6 *Uvećan dio Zemljine putanje sa slike 5 tijekom pet godina. Vidljive su različite putanje. Povećanje Jupiterove mase uzrokuje veću nestabilnost Zemljine orbite u odnosu na onu kada je masa Jupitera jednaka stvarnoj masi.*

3.3.3 Sto puta veća masa Jupitera

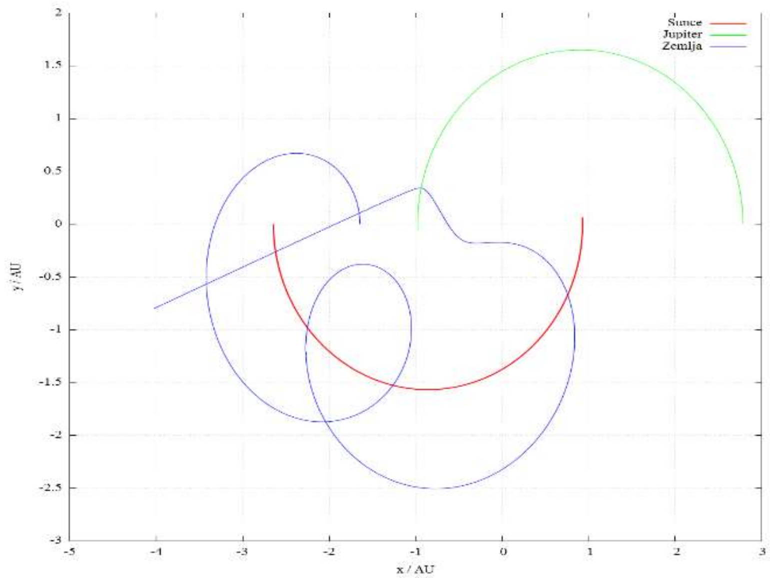
Neka je sada Jupiterova masa sto puta veća od stvarne mase. Putanje su prikazane na slici 7. Sunčeva elipsa se povećala u odnosu na onu sa slike 5, a nestabilnost Zemljine orbite raste s povećanjem Jupiterove mase.



Slika 7 *Prikaz putanja pri masi Jupitera sto puta većoj od stvarne mase. Sunčeva elipsa se povećala, a Zemljina orbita je još nestabilnija. Nestabilnost putanje je sada jako izražena i na skali astronomskih jedinica te se može vidjeti i bez uvećavanja.*

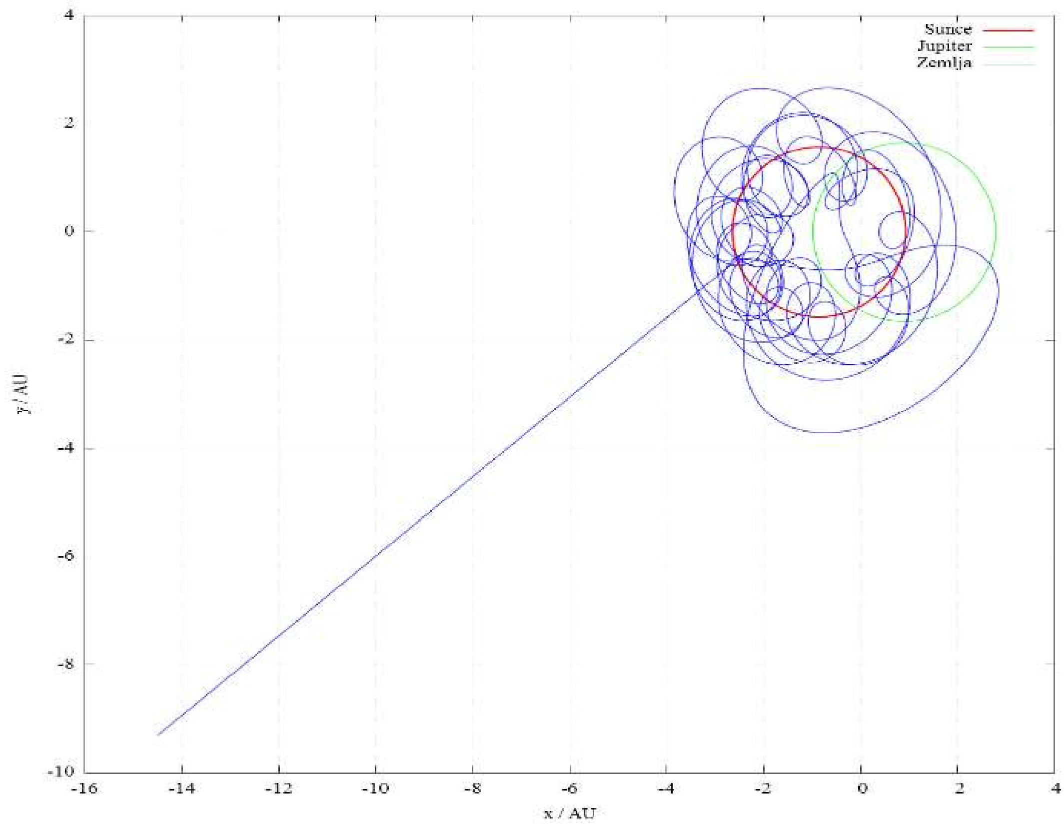
3.3.4 Tisuću puta veća masa Jupitera

Još je zanimljiv slučaj tisuću puta veće mase Jupitera od one stvarne prikazan na slikama 8,9 i 10. Svaka slika prikazuje gibanja pri različitim početnim brzinama Zemlje. U ovim slučajevima Zemlja ne zadržava putanju oko Sunca nego izlazi iz Sunčevog sustava nepovratno u svemir. Vrijeme promatranja na slici 8 je dvije i pol godine, a početni uvjeti su isti kao i u prethodnim slučajevima. Očekivano, Jupiter i Sunce opisuju eliptične orbite oko zajedničkog centra mase.[4]



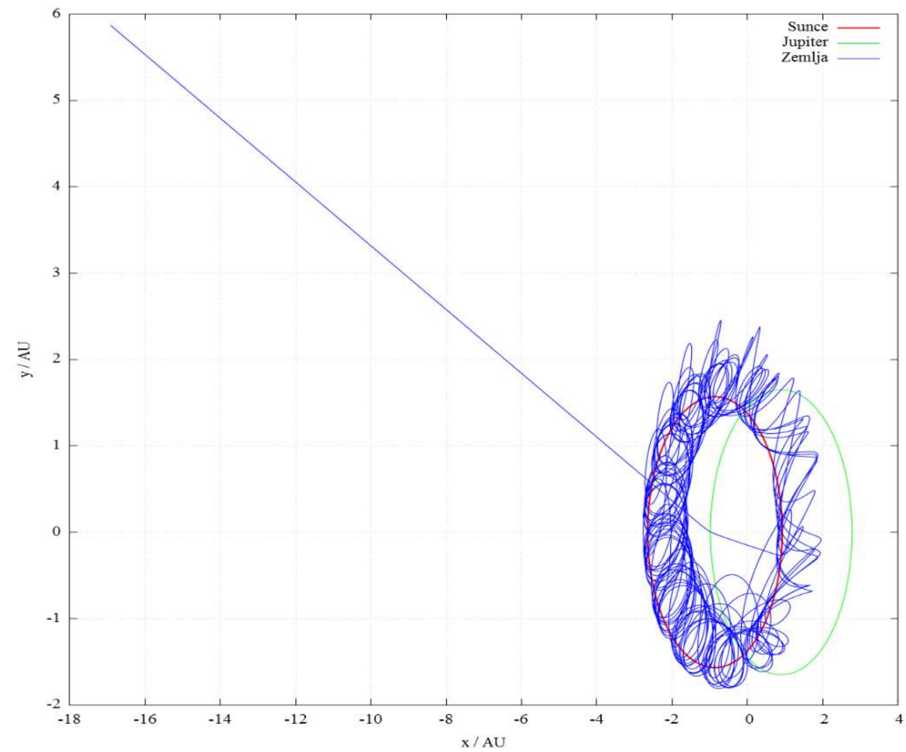
Slika 8 *Slučaj tisuću puta veće mase Jupitera od stvarne. Zemlja se zadržava u sustavu otprilike dvije godine, nakon čega biva nepovratno izbačena u svemir. Jupiter i Sunce opisuju eliptične putanje oko zajedničkog centra mase.*

Na slici 9 prikazano je gibanje pri tisuću puta većoj masi Jupitera u slučaju kada Jupiter i Sunce zadržavaju iste početne brzine kao i prije, dok su x i y komponente početne brzine Zemlje - 1.0 $\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}}$ i 6.28$\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}}$ redom. Vrijeme promatranja je dvadeset pet i pol godina.



Slika 9 *Slučaj tisuću puta veće mase Jupitera tijekom dvadeset pet i pol godina pri novim početnim uvjetima. Zemlja je još jednom izbačena iz sustava, ovaj put nakon duže vremena.*

Slika 10 prikazuje gibanja u slučaju tisuću puta veće mase Jupitera pri čemu Sunce i Jupiter zadržavaju iste početne brzine kao i prije, a *x* i *y* komponente početne brzine Zemlje su -2.$\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}}$ i 3.0$\frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{godina}}$ redom. Vrijeme promatranja je četrdeset sedam i pol godina.



Slika 10 *Slučaj tisuću puta veće mase Jupitera tijekom četrdeset sedam i pol godina, opet pri novoj početnoj brzini Zemlje . Rezultat je u konačnici opet isti – Zemlja je izbačena iz sustava, ali ovaj put za otprilike četrdeset sedam godina.*

Dakle, da masa Jupitera iznenada poraste tisuću puta, Zemlja ne bi bila više dio Sunčevog sustava. Zadržala bi se nekoliko godina u sustavu nakon čega bi bila lansirana nepovratno u svemir.

4 Zaključak

Kada bi Zemlja bila jedini planet Sunčeva sustava, imala bi potpuno stabilnu orbitu oko Sunca. Postojanje ostalih planeta u sustavu uzrokuje preturbacije Zemljine putanje. Kroz simulaciju napravljenu u programskom jeziku C ispitan je efekt Jupitera na nestabilnost Zemljine orbite. Izabran je baš Jupiter jer je to najmasivniji planet Sunčeva sustava. Riješen je problem tri tijela koji međudjeluju gravitacijskom silom – Sunca, Jupitera i Zemlje uz restrikciju da je Zemljina masa puno manja od masa ostalih dvaju tijela i da ne utječe na njihovo gibanje. Originalna Eulerova metoda nije bila pogodna za ovu simulaciju jer ne čuva energiju, i pri njenom korištenju dolazi do greške i povećanja amplitude oscilacija. Zato se koristila modifikacija Eulerove metode, tzv. Euler – Cromerova metoda koja dobro čuva energiju i daje točnije rezultate. Promatralo se gibanje u dvije dimenzije jer je poznato da se gibanje (skoro) cijelog Sunčevog sustava odvija u ravnini. Gibanje se promatralo iz sustava centra mase, što je ustvari centar mase Sunca i Jupitera zbog činjenice da je Zemljina masa puno manja od masa spomenutih dvaju tijela. Trebalo je uzeti u obzir činjenicu da se centar mase giba konstantnom brzinom te prilagoditi program tako da dobivene putanje budu one promatrane iz sustava centra mase. Dobiveni rezultati su grafički prikazi putanja sva tri tijela. Masa Jupitera je uzeta kao promjenjiva varijabla te se analiziralo što se događa pri stvarnoj masi te deset, sto i tisuću puta većoj. Pri stvarnoj masi nestabilnosti nisu bile uočljive na skali astronomskih jedinica duljine; tek na skali od nekoliko stotinki astronomskih jedinica daju se jasno razlučiti različite putanje. Povećanjem mase deset puta, uočljiva je nestabilnost i na skali astronomskih jedinica, ali se ne daju jasno razlučiti različite putanje. One postaju jasno vidljive na skali desetinki astronomskih jedinica. Povećanjem mase Jupitera sto puta, nestabilnost je jasno uočljiva i na skali astronomskih jedinica i jasno se vide različite putanje. Konačno, povećanjem Jupiterove mase tisuću puta, Zemlja se svega nekoliko godina zadržava u sustavu, nakon čega biva nepovratno izbačena iz njega. Ukratko, postojanje Jupitera uzrokuje preturbacije Zemljine putanje, a razina nestabilnosti raste s porastom Jupiterove mase.

5 Literatura

[1] URL:http://scienceworld.wolfram.com/physics/RestrictedThree-BodyProblem.html (14.8.2017.)

[2] David Betounes *Differential Equations.* Springer. p. 58, 2001.

[3] N. J. Giordano, *Computational Physics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1997.

[4] URL: https://www.scienceabc.com/nature/universe/why-is-the-solar-system-flat.html (15.8.2017.)

[5] J. Laskar *, Large-scale chaos in the Solar System,* 1994.

[6] V. Chobotov, *Orbital Mechanics* ,3rd edition, 2002.

[7] URL:https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_universal_gravitation (16.8.2017.)

[8] B. Ydri, A. Bouchareb, R. Chemam, *Lectures on Computational Physics,* Badji Mokhtar University, Annaba, Algeria, 2013.

[9] URL: http://www.physics.udel.edu/~bnikolic/teaching/phys660/numerical_ode/node2. html (15.8.2017.)

[10] Khatri, Poudel, Gautam, M.K., P.R., A.K. *Principles of Physics.* Kathmandu: Ayam Publication. pp. 170, 171. , 2010.